Anzeiger der Österreichischen Akademie der Wissenschaften,
math.-naturwiss. Klasse **121** (1984), 141—143

Das wirkliche Mitglied Edmund Hlawka legt für die Aufnahme in den Anzeiger die folgende Arbeit vor:

Eine Bemerkung zum asymptotischen Verhalten der höheren Momente der Anzahl der Inversionen

Von Helmut Prodinger

(Institut für Algebra und Diskrete Mathematik,
Technische Universität, Wien)

Ist eine Permutation π der Elemente $\{1, 2, \ldots, n\}$ gegeben, so bezeichnet man mit $I(\pi) = \{(i, j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n, \pi(i) > \pi(j)\}$ die Inversionen von π. $I(n, k)$ sei die Anzahl der Permutationen π mit genau k Inversionen. Es sei nun jede der $n!$ Permutationen als gleichwahrscheinlich angenommen. Die statistischen Gesetzmäßigkeiten dieser Größe zu kennen ist in verschiedenen Gebieten von Wichtigkeit, zum Beispiel auch in der Informatik. Deshalb betrachtete Doberkat [1] die s-ten Momente $\beta_s(n)$ und zeigte für festes s und $n \to \infty$

$$\beta_s(n) = \left(\frac{n}{2}\right)^{2s} + O(n^{2s-1}).$$

Die Bestimmung des nächsten Terms in der asymptotischen Entwicklung ist in [1] nicht gelungen und dem Fehlen tieferer Methoden zugeschrieben worden. Hier wird nun deshalb folgendes bewiesen:

$$\beta_s(n) = \left(\frac{n}{2}\right)^{2s} + \frac{s(2s-11)}{18}\left(\frac{n}{2}\right)^{2s-1} + O(n^{2s-2}).$$

Dies geschieht auf völlig elementare Weise. Mit eben dieser Methode kann man im Prinzip weitere Terme erhalten.

Man weiß, daß

$$G_n(z) = \frac{1}{n!}\sum_{k \geqslant 0} I(n, k) z^k = \prod_{j=1}^{n} \frac{1 + z + \ldots + z^{j-1}}{j}.$$

Sei U_s die Operation „s mal nach z ableiten und dann $z = 1$ setzen". Das s-te faktorielle Moment $\alpha_s(n)$ ist dann als $\alpha_s(n) = U_s G_n(z)$ gegeben. Weiters ist leicht einzusehen, daß $\alpha_s(n)$ und $\beta_s(n)$ bezüglich der ersten beiden Terme der asymptotischen Entwicklung übereinstimmen, so daß wir uns $\alpha_s(n)$ widmen können. Man sieht unmittelbar (mit $(x)_s = x(x-1)\ldots(x-s+1)$):

$$U_s z^i = \sum_{k=0}^{s} (i)_k \binom{s}{k} U_{s-k}$$

und daher

$$U_s \frac{1+z+\ldots+z^{n-1}}{n} = \frac{1}{s+1} \sum_{k=0}^{s} \binom{s+1}{k} (n-1)_{s-k} U_k.$$

Somit ist

$$\alpha_s(n) = U_s G_n(z) = \frac{1}{s+1} \sum_{k=0}^{s} \binom{s+1}{k} (n-1)_{s-k} \alpha_k(n-1)\ .$$

Wir setzen nun unbestimmt an:

$$\alpha_s(n) = \left(\frac{n}{2}\right)^{2s} + C_s n^{2s-1} + O(n^{2s-2}),$$

setzen dies in obige Rekursion ein und erhalten

$$\alpha_s(n) = \alpha_s(n-1) + s\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2s-1} + \frac{s}{2} C_{s-1}\, n^{2s-2} +$$

$$+ \frac{2}{3} s(s-1)\left(\frac{n}{2}\right)^{2s-2} + O(n^{2s-3}).$$

Durch sukzessives Einsetzen findet man daher

$$\alpha_s(n) = \sum_{j \leq n} \left[s\left(\frac{j-1}{2}\right)^{2s-1} + \frac{s}{2}\, C_{s-1} j^{2s-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} s(s-1)\left(\frac{j}{2}\right)^{2s-2} + O(j^{2s-3}) \right].$$

Man beachtet nun

$$\sum_{j \leq n} j^s = \frac{n^{s+1}}{s+1} + \frac{n^s}{2} + O(n^{s-1})$$

und erhält aus Obigem durch Vergleichung des Koeffizienten von n^{2s-1}:

$$C_s = -\frac{s}{2^{2s}} + \frac{s}{2s-1}\left[\frac{C_{s-1}}{2} + \frac{s-1}{3\cdot 2^{2s-3}}\right];\ C_0 = 0.$$

Durch Multiplikation mit $\binom{2s}{s}$ kann diese Rekursion durch anschließendes Aufsummieren gelöst werden:

$$C_s = \binom{2s}{s}^{-1} \sum_{j \leqslant s} \binom{2j}{j} j \cdot 2^{-2j} \left(-1 + \frac{8}{3} \frac{j-1}{2j-1}\right).$$

Die Auswertung der Summe ist einfach: Man schreibt

$$-1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{j-1}{2j-1} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \frac{1}{2j-1}; \; j \binom{2j}{j} 2^{-2j} = \frac{1}{2} (-1)^{j+1} \binom{-3/2}{j-1};$$

$$\frac{j}{2j-1} \binom{2j}{j} 2^{-2j} = \frac{1}{2} (-1)^{j-1} \binom{-1/2}{j-1}$$

und erhält

$$C_s = \binom{2s}{s}^{-1} \sum_{j<s} \left[\frac{1}{6} (-1)^j \binom{-3/2}{j} - \frac{2}{3} (-1)^j \binom{-1/2}{j}\right].$$

Man überlegt sich nun leicht, daß allgemein gilt

$$\sum_{j<s} (-1)^j \binom{a}{j} = \binom{a-1}{s-1} (-1)^{s-1}.$$

Unter Ausnützung von

$$\binom{-5/2}{s-1} = \binom{2s}{s} \frac{s(2s+1)(-1)^{s-1}}{3 \cdot 2^{2s-1}} \text{ und } \binom{-3/2}{s-1} = \binom{2s}{s} \frac{s(-1)^{s-1}}{2^{2s-1}}$$

ergibt sich daher

$$C_s = \frac{1}{6} \cdot \frac{s(2s+1)}{3 \cdot 2^{2s-1}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{2^{2s-1}} = \frac{s(2s-11)}{9 \cdot 2^{2s}},$$

wie behauptet.

Literatur

[1] E. E. Doberkat, Asymptotic estimates for the higher moments of the expected behavior of straight insertion sort, Information Processing Letters *14* (1982), 179—182.